ECUACIÓN EXPLÍCITA PARA EL CÁLCULO DE FACTORES DE FRICCIÓN.

Ing. Yanán Camaraza Medina¹, M Sc. Juan Landa García², Lic. Jesús Daniel López², Dr. Osvaldo F. García Morales².

1. Empresa de Sogas y Cordeles Julián Alemán, Carretera de la Jarcia, Matanzas CP10400, Matanzas, Cuba.

2. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Carretera a Varadero, km 3^{1/2}, Matanzas, Cuba.

Resumen.

En este trabajo se muestran los resultados del análisis de regresión realizado entre el factor de fricción, el número de Reynolds y la rugosidad relativa utilizando datos reportados, estableciéndose una comparación con el modelo más exacto conocido, la ecuación trascendente del factor de fricción de Colebrook, donde se muestra que no existe diferencia significativa entre estos modelos en el rango estudiado de los parámetros de trabajo.

Palabras claves: modelo, regresión, factor de fricción.

Introducción.

El cálculo de la caída de presión por el interior de conductos es una necesidad de muchos cálculos de proyecto o evaluación de instalación industriales, el cual se realiza a partir de la ecuación de Darcy.

$$h_{l} = f * \frac{l}{d} * \frac{V^{2}}{2 * g} \quad (m)$$
 (1)

Donde:

$$h_l = \frac{\Delta p}{\rho * g}$$
 es la pérdida de carga (m)

 Δp es la caída de presión en el conducto, Pa.

 ρ es la densidad del fluido, kg/m³.

g es la aceleración de la gravedad, m/s^2 .

f es el factor de fricción de Darcy, adimensional.

l es la longitud del conducto por cuyo interior se mueve el fluido, m.

d es el diámetro equivalente del conducto, m.

V es la velocidad del fluido por el interior del conducto, m/s.

El valor del factor de fricción de Darcy, y la ecuación utilizada para su cálculo, depende del régimen de flujo. En régimen laminar la expresión general desarrollada es la siguiente (Pavlov et al, 1981):

$$f = \frac{A}{\text{Re}}$$
(2)

Donde

A es una constante que depende de la forma geométrica de la sección transversal del conducto. Para conductos cilíndricos A=64.

Re es el número adimensional de Reynolds, el cual se calcula como:

$$\operatorname{Re} = \frac{V * d_{eq}}{v} \tag{3}$$

Donde:

Para conductos de sección transversal cilíndrica el diámetro equivalente es el diámetro interior del tubo o tubería.

V es la viscosidad cinemática del fluido, m²/s.

En régimen turbulento el factor de fricción es función del número adimensional de Reynolds Re y de la rugosidad relativa e/d, o sea:

$$f = \phi(\operatorname{Re}, e/d)$$

En la literatura consultada se recogen un grupo notable de ecuaciones explicitas para el cálculo del factor de fricción de Darcy f en tuberías lisas y rugosas para régimen turbulento, dentro de las cuales se destacan las ecuaciones mostradas en la Tabla 1, las cuales tienen un error superior a ± 30 %, pero tienen como ventaja la facilidad que brindan para determinar el valor numérico del factor de fricción.

Tabla # 1. Ecuaciones empíricas para la determinación del factor f de Darcy			
Ecuación	Autor y	Rango de	Divergencia
	referencias	validez	máxima (%)
$\left[\left(e/z - z \right) \right]^{-2}$	(Streeter,	$5000 \le \text{Re} \le 10^8$	
$f = 1.325 * \left[\ln \left(\frac{7d}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]$	2000)	$0,01 \le \frac{e}{d} \le 10^{-6}$	3,21
	(4)		
$\left[\left(\frac{e}{2} \right)^{0,9} \right]^{-2}$	(Pavlov et	$5000 \le \text{Re} \le 10^8$	
$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left[-2*Log \left(\frac{\sqrt{d}}{3.7} + \left(\frac{6.81}{\text{Re}} \right) \right) \right]$	al, 1981)	$0,01 \le \frac{e}{d} \le 10^{-6}$	2,95
	(5)		
$\frac{1}{\sqrt{f}} = \left[-2*Log \left(\frac{e}{37} + \frac{5,74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2}$	Millar	$5000 \le \text{Re} \le 10^8$	
	citado por	$0,01 \le e/_{d} \le 10^{-6}$	3,24
	(Fox y	7 a	
	McDonald,		
	1995)		
	(6)		
$\frac{1}{\sqrt{6}} = \left[-1.8 * Log \left(\left(\frac{e}{2.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{2.7} \right)^{-2} \right]^{-2}$	Ec. Haaland	$5000 \le \text{Re} \le 10^8$	
	(Zalen y	$0,01 \le e/_{J} \le 10^{-6}$	
$\left[\sqrt{J} \left[\left(\left(\frac{3.7}{2} \right) \right) \right] \right]$	Haaland,	/ a	1,44
	1983)		
	(7)		

El valor de la rugosidad absoluta e, incluido en las anteriores ecuaciones, varía con el material y con la tecnología de fabricación. En este trabajo se utilizaran los valores recomendados por Ramos [23] y aceptados por Shames [24], Wallas [26], Worth GPSA

[29], Vennard [30] y Sámano [31], los que al criterio de los autores de este trabajo son confiables, y son reportados en la Tabla # 2.

Tabla # 2 Valores de e para distintos tipos de tubos			
Tipo de tubo	<i>e</i> (mm)		
Tubos de acero sin costura	0.2		
Tubos de acero galvanizado	0.125		
Tubos de aceros viejos y herrumbroso	0.67-2.0		
Tubos de hierro fundido nuevo	0.26		
Tubos de hierro fundido usados	1.4 2.0		
Tubos de aluminio lisos	0.015 -0.06		
Tubo de latón, cobre, plomo, (sin costura)	0.0015 -0.01		
Tubos de hormigón sin pulir	3-9		
Tubos de hormigón pulido	0.3 -0.8		

Colebrook, según [Chen et al, 1999], [Crane, 2000] [Fernández Diez, 2000] [Mark, 2001] [Nayyar, 2003] [Shames, 2001] [Wallas, 1999] [White., 2001] [Vennard, 1988] [Sámano, 2003], encontró que los resultados de las pruebas experimentales para régimen turbulento se conglomeraban cercanamente alrededor de una línea única que es expresada por una ecuación de tipo trascendente cuya expresión matemática es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = Log\left(\frac{e/d}{3,7} + \frac{2,51}{\operatorname{Re}^*\sqrt{f}}\right)$$
(8)

Esta ecuación es válida para $4000 \le \text{Re} \le 10^8$ y $5*10^{-2} \le \frac{e}{d} \le 10^{-7}$ y permite obtener mejores resultados en el cálculo del factor de fricción, ya que, como se afirma, es la de mejor ajuste a los datos que le dieron origen, aunque el error de ajuste a los datos que le dieron origen es de ± 25 % (White, 2001) (Sámano, 2003), pero tiene como inconveniente la necesidad de implementar un método de aproximaciones sucesivas para obtener el valor del factor de fricción.

Al comparar la ecuación de Colebrook con las ecuaciones reportadas en la Tabla 1 se puede apreciar que existe una divergencia entre los resultados obtenidos por las ecuaciones explicitas y la trascendente de Colebrook. Puede apreciarse que la ecuación de Haaland es la de menor divergencia.

La ecuación de Colebrook fue representada gráficamente por Moody, en forma de un diagrama de Stanton pudiendo encontrarse el mismo en las siguientes referencias (1) (4) (6) (7) (8) (9) (10) (12) (13) (14) (16) (19) (20) (23) (24) (25) (26) (29) (31) (34) (35) (36) (39) (40) (42) (44).

Esta ecuación para tuberías lisas quedará:

$$f = (0,791 * Ln \text{ Re} - 1,62)^{-2}$$
(9)

Ante la limitante del empleo del método de aproximaciones sucesivas al calcular el factor de fricción por la ecuación de Colebrook y que los valores de divergencia de las ecuaciones explícitas son aún grandes se ha establecido en este trabajo el **objetivo** de establecer una ecuación explicita que permita obtener con facilidad el valor del factor de fricción para régimen turbulento, cuya divergencia sea menor respecto a la ecuación de Colebrook que el obtenido en las ecuaciones anteriormente citadas de la Tabla 1 y cuyo error de ajuste a los datos sea menor del 30%.

Desarrollo.

1

(Camaraza, 2008) ha generalizado muchos datos obtenidos a partir de la búsqueda de información sobre el tema (Cameron, 1969), (Wood, 1947) y propone una ecuación para el cálculo del factor f, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$f = \frac{1}{\left(A * B\right)^2} \tag{10}$$

Donde:

$$B = \ln\left(\frac{47,5}{\text{Re}^2} + \frac{3,27*\left(\frac{e}{d}\right)^{1,12}}{\text{Re}} + \frac{\left(\frac{e}{d}\right)^{2,25}}{18,26}\right)$$
(10.1)

$$A = \frac{\left[1,048 * \ln\left(\operatorname{Re}^{2.5} * \frac{e}{d}\right)\right]^{-0.01}}{2,497}$$
(10.2)

En la ecuación anterior A = 0,392 para $0,001 \le \frac{e}{d}$ y $4000 \le \text{Re} \le 1,81 \times 10^8$

La ecuación propuesta da valores muy cercanos a los obtenidos por la ecuación de Colebrook, con una divergencia máxima de 0,8 % y promedio de 0,3 %.

El error cometido, por exceso o por defecto, con respecto a lo graficado por Moody, se puede evaluar mediante la siguiente ecuación, la cual aporta un 97% de confianza.

$$error = \left(1 - \frac{C}{f}\right) * 100 \qquad \begin{array}{l} \text{Si el error } es(+) es \text{ por exceso} \\ \text{Si el error } es(-) es \text{ por defecto} \end{array}$$
(11)

Donde:
$$C = 5,302 * \left[Ln \left(\frac{\left(\frac{e}{d} \right)^2}{13,74} + \frac{1,36 * \frac{e}{d}}{\sqrt{f} * \text{Re}} + \frac{6,3}{\text{Re}^2 * f} \right) \right]^{-2}$$
 (11.1)

Profundizando en el análisis posteriormente se obtuvo (Camaraza y Landa, 2008) que puede obtenerse una mejor ecuación que la anterior para la determinación del factor de fricción de Darcy, la cual es válida en el mismo intervalo que el modelo de Colebrook, quedando escrita de la siguiente forma:

$$f = \left[-2*Log\left(\frac{e}{d}*0,2707 - \frac{A}{B}\right) \right]^{-2}$$
(12)

Donde:

$$A = 2,296 * Log\left[\frac{47,5}{\text{Re}^2} + \frac{3,27 * \left(\frac{e}{d}\right)^{1,12}}{\text{Re}} + \frac{\left(\frac{e}{d}\right)^{2,25}}{18,26}\right]$$
(12.1)

$$B = \operatorname{Re}^{*} \left[Log \left(\operatorname{Re}^{2.5} * \left(\frac{e}{d} \right)^{1,12} \right) \right]^{0.01}$$
(12.2)

Esta ecuación propuesta arroja una divergencia máxima con respecto al modelo de Colebrook del orden del $\pm 0,144$ %, el que fue obtenido implementando un algoritmo en

la herramienta computacional MatLab, que permite la comparación de esta ecuación con la de Colebrook, cuya representación gráfica se muestra en la figura 1.



Figura 1. Grafico de errores relativos vs Número de Reynolds, entre la ecuación de Colebrook y la ecuación a investigar.

Como se observa la divergencia entre estos modelos es mínima, pero cabe la duda acerca de cual de estos modelos representa en mejor medida los datos experimentales que le dieron origen, para lo cual se realiza el siguiente análisis para tubos nuevos y limpios, utilizando valores almacenados en una base de datos de cerca de 2350 valores, los cuales fueron obtenidos de las referencias anteriormente citadas.

El cálculo del error relativo máximo al validar la ecuación de Colebrook arroja un valor de 19.98 % lo cual se muestra en la figura 2.



Figura 2. Grafico de errores relativos vs Número de Reynolds, entre la ecuación de Colebrook y los datos experimentales.

Para la ecuación que se investiga se encontró un error máximo del 19.89 por ciento, apreciable en la figura 3.



Figura 3. Grafico de errores relativos vs Número de Reynolds, entre la ecuación a investigar y los datos experimentales.

De los resultados obtenidos en la comparación con los valores tomados como base para el análisis, se observa un mayor ajuste de la ecuación a investigar a los datos experimentales al compararla con el ajuste alcanzado por el modelo de Colebrook, siendo adicionalmente más sencilla de implementar, por lo que esta última se recomienda sea utilizada en el rango de valores de rugosidad relativa y de números de Reynolds en que fue obtenida.

Si se analiza la ecuación obtenida para diferentes intervalos de Reynolds y rugosidades se aprecia que:

1. Existe una excelente aproximación a los valores experimentales donde el error relativo máximo oscila entre el 5 % y el 12 %, tendiendo a disminuir a medida que disminuye la rugosidad, para los intervalos de $10^{-5} < \frac{e}{d} < 5*10^{-4}$ y $3000 \le \text{Re} \le 10^5$, como aparece representado en la figura 4.



Figura 4. Gráfico del factor de fricción vs Número de Reynolds, para la ecuación a investigar y del factor de fricción para valores de la rugosidad relativa de 0.00015535.

Para valores superiores a 10⁵ se aprecia que la divergencia entre el modelo y los datos se incrementa con el incremento del Número de Reynolds, lo que presupone que pudiese ajustarse un modelo más exacto a partir de este valor.

Conclusiones

Se ha obtenido un modelo explícito de mejor ajuste a los datos experimentales que le dieron origen que el modelo trascendente obtenido por Colebrook, lo que facilita su aplicación en los cálculos de Ingeniería y permite obtener una mayor precisión en los resultados numéricos del factor de fricción de Darcy y en los que se deriven a partir del uso de este en el proceso de cálculo.

Recomendaciones.

Utilizar el modelo obtenido en lugar del modelo de Colebrook para el cálculo del factor de fricción en tuberías nuevas y limpias.

Realizar un nuevo análisis de regresión a los datos experimentales cuyo valor del número de Reynolds sea superior a 10^5 , con vistas a establecer la posibilidad de un mejor modelo en este rango de valores experimentales.

Bibliografía.

- Bejan, A., 1998, Rules of Thumbs by Mechanical Engineers, Ed. McGraw Hill, New York.
- 2- Bird, R., et al, 1992, Fenómenos de transporte, Ed. Continental, Madrid.
- 3- Charkinov, Priort, 1981, Cálculo de compresores multietápico, Ed. Mir, Moscú.
- 4- Camaraza Medina, Y., 2008, Selección y elementos para la explotación eficiente de un intercambiador de calor para el enfriamiento del aire de salida de la primera etapa del compresor multietápico modelo A-12X-10, Trabajo de diploma, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Matanzas., Cuba. Febrero de 2008.

- 5- Camaraza, Y. y J. Landa, 2008, Nueva ecuación para la determinación del factor de fricción en tuberías rectas (no publicado), Informe técnico, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Matanzas., Cuba. Septiembre de 2008.
- 6- Chen, Liu et al, 1999, Mechanical Engineers Handbook, Ed. CRC Press, Michigan University of Michigan.
- 7- Cherkassky, T., 1986, Bombas, Ventiladores y Compresores, Ed. Mir, Moscú.
- 8- Crane, 2000, Flow through valves and pipes, Ed. McGraw Hill, New York.
- 9- Dayli, A., 1999, Dinámica de los fluidos, Ed. John Willey and Sons, New York.
- 10-Fernández Diez, Pedro, 2000, Mecánica de Fluidos, Universidad de Madrid.
- 11-Fernández Diez, Pedro, 2000, Ingeniería Térmica, Universidad de Madrid.
- 12- Fox, Robert W. y McDonald, Alan W., 1995, Introducción a la mecánica de los fluidos, 3^{RA} Edición, Ed. John Willey and Sons, México.
- 13- Geankoplis, M., 1998, *United operations chemical process*, Doc PDF, University of Michigan.

14- Kreit, F., 1999, Mechanical *Engineers Handbook*, University of Colorado, CRC Press.

15- Landa García, Juan, 2003, *Elementos para una explotación más limpia y ecológica del petróleo crudo nacional*, Tesis de Maestría, Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos", Matanzas, Cuba.

16- Levenspiel, J., 1993, *Flujo de fluidos y transferencia de calor*, Ed. Jhon Willey and Sons, México.

17- Mark, 2001, *Mark's Standard Mechanical Engineers Handbook*, University of Colorado, CRC Press.

18- McCabe, A. y Smith, J. D. 1991, *Operaciones Unitarias en Ingeniería Química*,Ed. John Walley and Sons, México.

19- Nayyar Mohinder L., 2003, *Introduction to pipe systems*, Ed. John Willey and Sons, Georgia.

20- Pavlov, K. F., Romankov, P. G. y Noskov, A. A., 1981, *Problemas y ejemplos para el curso de operaciones básicas y aparatos en tecnología química*, Ed. Mir, Moscu.

21- Perry, R. et al, 1999, *Chemical Engineers Handbook*, Ed. McGraw Hill, 7th Edition.

22- Pons Hernández, A. et al, 1988, *Termodinámica técnica para ingenieros químicos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana.

23- Ramos Páez, N., 1985, *Bombas, ventiladores y compresores*, Ed. ISPJAE, La Habana.

24- Shames, I., 2001, Mecánica de Fluidos, Ed. McGraw Hill, México.

25- Streeter, V. L., 2000, Mecánica de Fluidos, Ed. McGraw Hill, México.

26- Wallas, D., 1997, *Rules of thumbs in Chemical Engineer*, Ed. McGraw Hill, New York.

27- Wallas, D., 1999, *Rules of thumbs in Mechanical Engineers*. Ed. McGraw Hill, New York.

28- White, F., 2001, Fluid Mechanics, Ed. McGraw Hill, Georgia City.

29- Worth GPSA, 2003, *Engineering data Book*, 12TH Edition (electronic), Oklahoma.

30- Vennard, J. et al, 1988, *Elementos de mecánica de los fluidos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana.

31- Sámano A., 2003, Mecánica de los fluidos, Ed. Continental, México.

32- Vratón. J., 2002, Mecánica de fluidos, Ed. McGraw Hill, Buenos Aires.

33- Zalen, S. y Haaland, E., 1983, Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *J. Fluids Engr.trans ASME*, 105:89–90.